

МЕТОДИКА ТЕПЛОВОГО И ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАСЧЕТА КОАКСИАЛЬНЫХ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

Дымар О.В. Бабенко В.А.

Постановка задачи математического расчета теплообменника для охлаждения/нагрева молочных продуктов и продуктов переработки молока

Имеется N соосных цилиндрических каналов теплообменника (см. рис. 1, где $N=11$), по которым движутся в режимах тока или противотока тепловой агент и продукт.

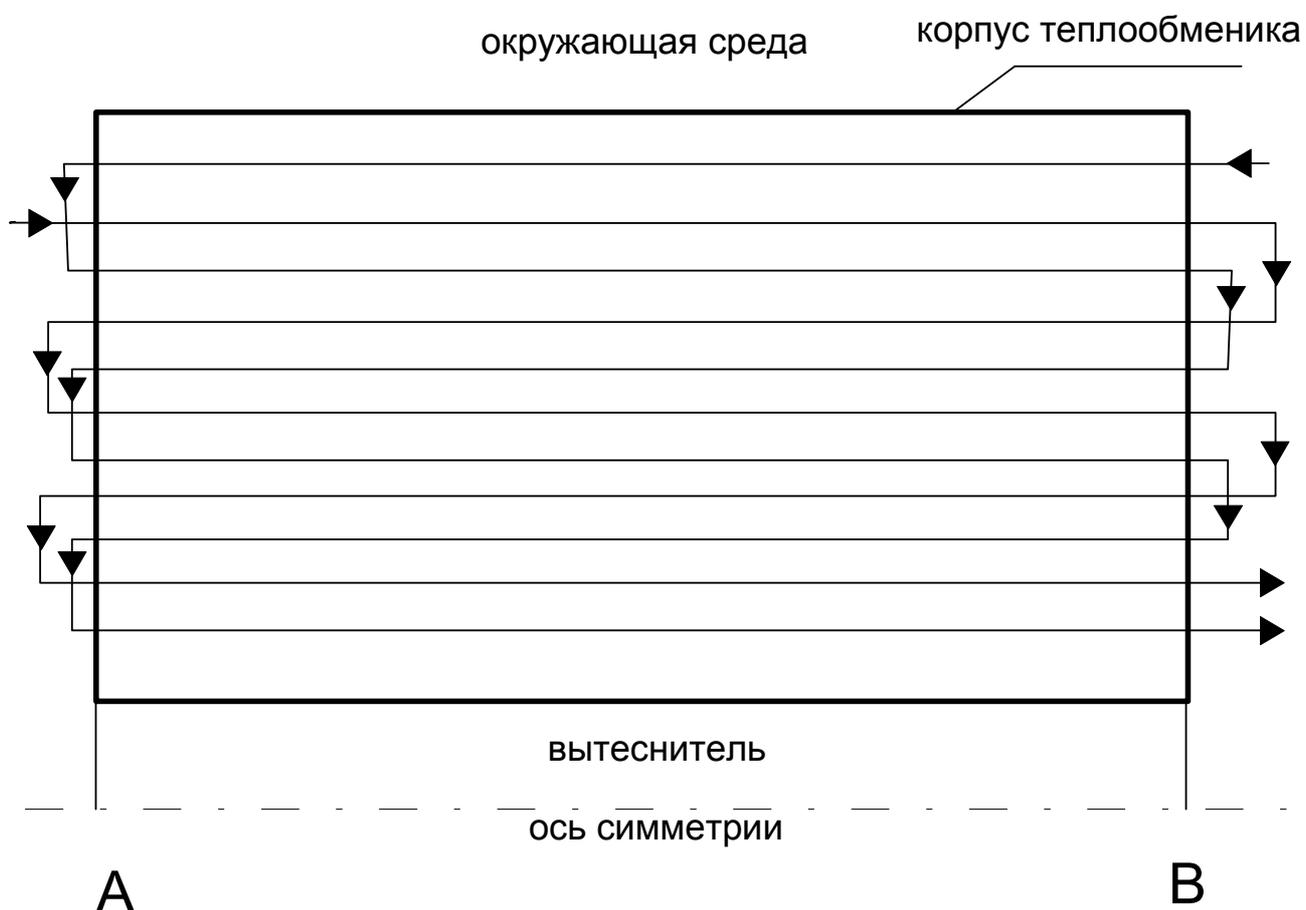


Рис. 1. Схема потоков в коаксиальном теплообменнике.

Потоки обмениваются теплом через разделяющие их металлические стенки, в результате чего на выходе из теплообменника температуры теплового агента и продукта изменяются. Через внешнюю поверхность корпуса

теплообменника происходит теплообмен с окружающей средой. При необходимости может быть задан теплообмен со средой, находящейся внутри вытеснителя.

Каналы теплообменника имеют небольшую толщину (2...5 мм) по сравнению с их длиной (1250...2000 мм). Поэтому поперечным изменением температуры по толщине пренебрегаем. В этих условиях температурное поле в теплообменнике можно описать на языке системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для каждого из каналов запишем дифференциальное уравнение теплового баланса

$$(-1)^{n(i)} g_i C_i(t_i) \frac{dt_i}{dx} = F_{in_i} k_{in_i} (t_{i-1} - t_i) + F_{out_i} k_{out_i} (t_{i-1} - t_i), \quad i = 1 \dots N \quad (1)$$

где

$$n(i) = \begin{cases} 1 & \text{движение в } i - \text{с лева на право} \\ -1 & \text{движение в } i - \text{с права на лево} \end{cases} \quad (2)$$

$C_i(t_i)$ - зависящие от температуры теплоемкости продукта или охладителя, g_i - [кг/с] - массовый расход по i -ому каналу, t_i - средняя по сечению температура в i -ом канале, k_{in_i} - эффективный коэффициент теплопередачи от i -ого канала к $i-1$ каналу, k_{out_i} - эффективный коэффициент теплопередачи от i -ого канала к $i+1$ каналу.

Индекс i в (1) принимает значения от нуля до N , где N - число каналов теплообменника. При этом нулевому значению индекса ($i=0$) в правой части (1) соответствует температура вытеснителя, а значению $N+1$ - температура окружающей среды. При отсутствии вытеснителя или теплообмена по его стенке коэффициенту теплопередачи к вытеснителю присваивается нулевое значение.

К задаче (1) ставятся двухточечные граничные условия в точках А (левый конец канала) и В (правый конец). На входах в теплообменник охлаждаемого продукта и охладителя ставятся граничные условия заданных начальных температур продукта и, соответственно, охладителя. Таких каналов два. Для

остальных $N-2$ у каждого канала есть "предыдущий" канал-донор, из которого поступает среда, и на этой границе ставятся условие непрерывности температуры

$$t_m = t_n \quad (3)$$

где m и n - номера каналов. Таким образом, всего граничных условий - N т.е. число граничных условий равно числу решаемых уравнений. Какая либо регулярная структура взаимного расположения каналов с агентом и с продуктом в предлагаемой методике не предполагается; единственное требование, каналы должны иметь одну длину и были соосными.

Принимаем, что в местах реверсирования потоков теплообмен не происходит. Местные гидравлические сопротивления, связанные с разворотом потоков, принимаются в расчет при определении общих гидравлических потерь.

Выбор алгоритма численного решения двухточечной задачи расчета коаксиального теплообменника.

Численное решение системы обыкновенных уравнений сводится к стандартному виду набора уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots \\ y'_n &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения более высокого порядка можно привести к системе уравнений первого порядка.

Система уравнений (4) с начальными условиями

$$y_1(x_0) = y_{1_0}, y_2(x_0) = y_{2_0}, \dots, y_n(x_0) = y_{n_0} \quad (5)$$

всегда имеет решение, чего нельзя сказать о более сложной системе с условиями, наложенными в двух точках (краевая задача).

Решение краевой задачи, если оно существует, может быть получено с помощью итерационного процесса. Основными методами решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений являются: метод коллокаций, метод стрельбы и конечно-разностный метод. Они имеют различные алгоритмы и условия применимости. В зависимости от того,

является ли задача линейной или нелинейной, имеются различные модификации указанных методов. Заметим, что в силу переменности физических свойств уравнения (2) нелинейные, однако степень их нелинейности довольно мала.

В *методе коллокаций* решение аппроксимируется кусочными полиномами на разностной сетке. Коэффициенты полиномов подлежат определению в ходе реализации данного метода. Полиномиальная аппроксимация должна удовлетворять граничным условиям и дифференциальным уравнениям в точках коллокаций. Для численного решения этих уравнений применяется метод Ньютона с итерациями. В методе коллокаций происходит уточнение начальной сетки с тем, чтобы равномерно распределить ошибку по рассчитываемому интервалу. Для применения метода необходимо иметь начальное приближение к решению. Вариантом метода коллокаций для линейных уравнений является метод Чебышева.

Алгоритм *метода стрельбы* основан на том, что краевая задача сводится к начальной с условиями типа (5). При этом недостающие начальные условия "угадываются", и затем улучшаются в ходе итерационного процесса. В конечной точке интервала такое решение с "угаданными" начальными условиями не удовлетворяет известным граничным условиям на дальнем конце, следовательно начальные условия модифицируются, чтобы уменьшить невязку. Для построения итераций минимизации невязки применяется один из вариантов метода Ньютона. Нет никакой уверенности в том, что итерации в конце концов сойдутся, но можно на это надеяться, если:

- 1) решение действительно имеется,
- 2) система не является численно неустойчивой либо жесткой,
- 3) применяется "хорошее", т.е. достаточно близкое к истинному решению начальное приближение для неизвестных граничных условий.

Конечно-разностный метод является более универсальным. Он часто применяется успешно даже в тех случаях, когда достичь решения при помощи двух описанных выше методов не удастся. В то же время, для применения этого

метода также необходимо иметь достаточно хорошее начальное приближение.

Записывается конечно-разностная аппроксимация уравнений с использованием известного начального приближения. Вследствие этого в точках разностной сетки образуются невязки, которые надо минимизировать в ходе итерационного процесса, построенного по методу Ньютона. Невязки уменьшаются как за счет изменения решения, так и за счет добавления (если это необходимо) новых узлов сетки.

Метод конечных разностей может расходиться, если начальное приближение недостаточно хорошо. Трудно также применить данный метод, если имеется быстрое изменение решения на коротком интервале изменения аргумента.

В производственных условиях резкие изменения температур теплового агента и продукта по длине не встречаются. Поэтому остановимся на конечно-разностном методе, как на наиболее универсальном для решения нелинейной двухточечной краевой задачи общего вида. Кроме того отметим, что в конечно-разностном методе могут применяться параметрические варианты достижения сходимости, что усиливает его возможности.

Для реализации конечно-разностного метода решения двухточечной краевой задачи (1), (3) была разработана программа (рис. 2). Численное моделирование процесса теплообмена между потоками хладагента и продукта осуществляется программой MILKD написанной на языке FORTRAN. Для решения используется конечно-разностный метод поправок с весами переменного порядка точности аппроксимации на сетке с переменным шагом, реализованный в пакете прикладных подпрограмм IMSL. Управляющая программа считывает ряд текстовых файлов и в результате работы выводит информацию на экран и в текстовые файлы.

Решение параметризованной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями в двух точках программа ведет с двойной значностью:

$$y' = y'(x, y, p) \quad (6)$$

$$h(y_A, y_B, p) = 0 \tag{7}$$

где y' , y , y_A , y_B - вектора. Предполагается, что система (6) и граничные условия (7) могут содержать параметр p который может изменяться от нуля до единицы.

Этот параметр может содержаться в системе (6) - (7) естественным образом. Если же такого параметра в системе нет, то его часто полезно ввести искусственно для облегчения задачи получения сходящегося решения.



Рис. 2. Блок-схема программы MILKD.

Параметрический метод сходимости к решению является одним из наиболее мощных способов решения краевых задач для систем уравнений в обыкновенных или частных производных. Пусть при $p = 0$ решение системы (6)

- (7) получить легко. Тогда можно построить вычислительный метод "продвижения" по p начиная от $p = 0$ или от любого другого p при котором решение уже получено, до конечного значения $p=1$ которое и будет соответствовать искомому решению. Двигаясь малыми шагами по p и используя при этом "производную" систему, т.е. систему (6) - (7) продифференцированную по p доходим до $p=1$ и решение на этом заканчивается.

Запишем (1) в виде разрешенном относительно производных

$$\frac{dt_i}{dx} = p \frac{F_{in_i} k_{in_i} (t_{i-1} - t_i) + F_{out_i} k_{out_i} (t_{i-1} - t_i)}{(-1)^{n(i)} g_i C_i(t_i)}, \quad (8)$$

как это требует запись уравнения в (6). За параметр p в уравнении (8) удобно выбрать искусственно введенный в уравнение (8) множитель перед правой частью. При $p=1$ имеем требуемое решение. При $p=0$ температура по каналам не будет изменяться, что соответствует бесконечно большим расходам, как теплового агента, так и продукта.

Граничные условия постоянной температуры могут ставиться на левом или на правом конце теплообменника там, где входит поток

$$t_i = t_{in}, \quad (9)$$

где t_{in} - известная входная температура теплового агента или продукта.

На остальных границах имеют место условия связи (непрерывности) температур (3).

Гидравлическое сопротивление теплообменника

Сопротивление теплообменника определяется как сумма потерь по длине и местных сопротивлений для всей совокупности ходов (10):

$$\Delta h = \Delta h_{fr} + \Delta h_{loc} = \Sigma \{ [\lambda(l/D) + \Sigma \zeta_i] \times (u^2/2g) \} \quad (10)$$

где Δh_{fr} - потери напора по длине вследствие трения, Δh_{loc} - потери напора на местных сопротивлениях, ζ_i - местный коэффициент трения, l - длина прямолинейного участка, d - эквивалентный диаметр трубы, $\Sigma \zeta_i$ - сумма коэффициентов местных сопротивлений, u - скорость движения жидкости, g -

ускорение свободного падения.

Для ламинарного режима

$$\Delta h_{fr} = \Sigma \left\{ \frac{64}{Re} (l/D) \cdot (u^2 / 2g) \right\} \quad (11)$$

Для переходного режима ($4500 \leq Re \leq 40 D/\Delta$), где Δ - высота шероховатостей, определение сопротивлений прямых участков теплообменника (кольцевых зазоров) проводим, используя формулу Дарси-Вейсбаха для гладких труб, в которой коэффициент сопротивления по длине определяется по формуле Блазиуса (12)

$$\Delta h_{fr} = \Sigma \left\{ \frac{0,3164}{Re^{0,25}} (l/D) \cdot (u^2 / 2g) \right\} \quad (12)$$

Коэффициент местного сопротивления может быть определен по опытным данным согласно определению

$$\zeta = \frac{2\Delta P}{\rho u^2} \quad (13)$$

Для вычисления гидравлического сопротивления теплообменника программой используются зависимости (11) - (13). Коэффициенты местного сопротивления ζ связанные с переходом сред из одного канала в другой или входом/выходом из устройства, удобно разделить на две части и отнести их к началу или концу разных каналов. (В программе считается, что на входе и выходе из канала имеются местные гидравлические сопротивления, задаваемые массивами psi_in и psi_out). Задавая эти массивы нулевыми, отказываемся от учета местных гидравлических сопротивлений.

Коэффициенты теплопередачи

На каждой стенке происходит теплопередача в соседний канал либо окружающую среду с коэффициентом теплопередачи (14)

$$k_i = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_{\alpha_1}} + \frac{h}{\lambda_w} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (14)$$

где h - толщина стенки, λ_{α_1} - коэффициент теплопроводности стенки, а значение коэффициента теплообмена на поверхностях каналов

$$\alpha = \frac{Nu \lambda_f}{d_e} \quad (15)$$

определяется по эмпирическим формулам для числа Нуссельта, зависящего от чисел Рейнольдса и Прандтля.

Каналы коаксиального теплообменника для охлаждения/нагрева молочных продуктов имеют кольцевое сечение. В целях компактности и хорошего теплообмена каналы выбираются тонкими, поэтому типичным является отношение внешнего и внутреннего радиусов ограничивающих цилиндрических поверхностей, близкое к единице. В этих условиях можно пренебречь эффектами кривизны поверхностей и считать, что теплообмен происходит в эквивалентном плоском канале.

Рассмотрим в качестве продукта цельное молоко, а в качестве хладагента воду. Числа Рейнольдса, построенные по диаметру каналу D , имеют различный порядок для течения воды и для молока, поскольку вязкость молока примерно в четыре раза превосходит вязкость воды, а плотности близки. Оценка чисел Рейнольдса при течении воды по каналам теплообменника показывает, что они принадлежат интервалу переходных и неразвитых турбулентных режимов: $Re = 3000 - 15000$. Соответственно, числа Нуссельта для течения молока находятся в интервале ламинарных и переходных режимов.

Данная оценка позволяет поставить задачу выбора из литературы таких аппроксимаций чисел Нуссельта, которые позволяли бы рассчитывать теплообмен в ламинарном, переходном и турбулентном режимах.

Фактор цилиндрической геометрии является, как уже говорилось, малозначащим. Более существенным является фактор наличия входных участков гидравлического сопротивления и теплообмена. На входе в теплообменник либо после разворота потоки имеют профили скорости, близкие к стержневым, что задает локальное увеличение коэффициентов теплообмена. Длина теплового входного участка оценивается формулой (16).

$$\frac{L}{D} = 0.02 Re Pr \quad (16)$$

При переходном режиме течения существует значительное количество эмпирических формул для определения критерия Нуссельта. Поэтому в программе реализованы несколько формул для числа Нуссельта. Исходя из значения входного параметра программы nNu выбираются следующие функциональные зависимости

$$nNu = 1: \quad Nu = \max(0.001 Re^{1.18} Pr^{0.5}; 3.5) \quad (17)$$

$$nNu = 2: \quad Nu = \max(0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4}; 3.5) \quad (18)$$

$$nNu = 3: \quad Nu = \max\left(\frac{0.023 Re^{0.8} Pr}{1 + 2.14 Re^{-0.1} (Pr^{2/3} - 1)}; 3.5\right) \quad (19)$$

$$nNu = 4: \quad Nu = \max(0.026 Re^{0.8} Pr^{1/3}; 3.5) \quad (20)$$

$$nNu = 5: \quad Nu = F_{x/d} 0.032 Re^{0.8} Pr^{0.33} \text{ где } F_{x/d} = \frac{4}{3} \max\left(\frac{x^{-0.064}}{D}, 1\right) \quad \text{если } 10000 < Re$$

$$Nu = F_{x/d} \frac{1}{300} Re Pr^{0.37} \text{ где } F_{x/d} = 1 \quad \text{если } 2300 \leq Re \leq 10000 \quad (21)$$

$$Nu = F_{x/d} 1.86 (Re Pr)^{0.33} \text{ где } F_{x/d} = \frac{x^{-0.33}}{D} \quad \text{если } 2300 < Re$$

Если параметр nNu выходит за пределы интервала (1,5) по умолчанию используется формула (17).

Рассмотрим структуру формул (17) - (21).

В формуле (17) зависимость для плоских каналов (22) в переходном режиме

$$Nu = 0.001 Re^{1.18} Pr^{0.5} \quad (22)$$

дополняется ограничителем для ламинарного режима

$$Nu = 3.5 \quad (23)$$

Формула (23) представляет собой классическое решение Нуссельта-Греца для ламинарного течения теплоносителя в бесконечно длинном плоском канале, на стенке которого задана постоянная температура. По данным для канала кольцевого сечения установившееся значение числа Нуссельта отличается от (21) не более, чем на 0.1.

Формула (17) не учитывает входного участка. Она также не пригодна для описания теплообмена в условиях больших чисел Нуссельта, поскольку показатель степени при числе Рейнольдса соответствует именно переходному режиму.

Следующая формула (18) построена как суперпозиция стандартной формулы для числа Нуссельта при полностью развитой турбулентности, т.е. при числах $Re > 10^5$, и стандартного значения (23). Программа выбирает максимальное из этих двух значений, переход от одной ветви к другой означает переход от турбулентного режима к ламинарному.

Формула (19) является вариантом формулы Рейхарта из. Данная формула имеет более широкий интервал применимости по числу Re. При низких числах Рейнольдса в ней также предусмотрено переключение на число Нуссельта из решения Греца (23). Данная формула имеет широкое экспериментальное подтверждение.

Формула (20) похожа на формулу (18) с тем отличием, что здесь содержится несколько иной показатель в зависимости от числа Прандтля.

Наконец, последняя из представленных формула (21) является трехстрочной. Для различных диапазонов числа Рейнольдса применяются разные формулы. Кроме того, в ней при помощи фактора $F_{x/d}$ учтено влияние входного температурного участка. В принципе, это наиболее сложная и точная формула. Однако, согласно ей число Нуссельта может меняться немонотонно. Скачки в области сшивания различных диапазонов могут вредить сходимости итераций.

В принципе, все представленные формулы дают при численном моделировании сходные результаты. Наиболее сильно данные формулы отличаются при больших числах Рейнольдса, а для результатов наибольшее значение имеют режимы с наименьшими числами Рейнольдса.

Литература

1. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. литературы, 1979
3. Shah R. K. TN Report of Harrison Radiator Division, General Motors Co., 1976
4. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко и др. - М.: Наука, 1969. - 455с.